Тема "Евклидови и унитарни пространства. Ортогонализация по метода на Грам-Шмид." по Алгебра 1.

Камен Димитров Младенов, Група 6

05 Февруари 2022

По определение, за линейно пространство V над поле $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$, скаларно произведение е изображение $\langle , \rangle : V \times V \to F$ със свойствата $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ $\forall u, v \in V$, $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ $\forall u_1, u_2, v \in V$, $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in F$ и $\langle u, v \rangle = 0 \in F$, $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ $\forall v \in V$ точно когато $v = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \in V$.

По определение, линейно пространство над полето на реалните числа със скаларно произведение се нарича евклидово. Също, линейно пространство над полето на комплексните числа със скаларно произведение се нарича унитарно.

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство V над поле F, следните свойства са в сила:
1) $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle \quad \forall u, v_1, v_2 \in V$ 2) $\langle u, \lambda u \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V, \forall \lambda \in F$
3) $\langle \overrightarrow{\mathcal{O}}_V, v \rangle = \langle v, \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \rangle = 0 \quad \forall v \in V, \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \in V$
4) $\left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} \langle u_i, v_j \rangle \quad \forall u_i, u_j \in V, \forall \lambda_i, \mu_j \in F$

Доказателство: 1) $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \overline{\langle v_1 + v_2, u \rangle} = \overline{\langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle} = \overline{\langle v_1, u \rangle} + \overline{\langle v_2, u \rangle} = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$ за произволни $u, v_1, v_2 \in V$
2) $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \overline{\lambda}\, \overline{\langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$ за произволни $u, v \in V, \lambda \in F$
3) За произволен вектор $u \in V$ е в сила $0u = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, следователно $\langle \overrightarrow{\mathcal{O}}_V, v \rangle = \langle 0u, v \rangle = 0 \langle u, v \rangle = 0$ и тогава $\langle v, \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \rangle = \langle v, 0u \rangle = \overline{0} \langle v, u \rangle = 0 \langle v, u \rangle = 0$.
4) От свойствата в определението за скаларно произведение и от вече доказаните свойства,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \right\rangle = \left\langle \lambda_1 u_1, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \right\rangle + \cdots + \left\langle \lambda_m u_m, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \right\rangle =$$
$$= \langle \lambda_1 u_1, \mu_1 v_1 \rangle + \cdots + \langle \lambda_1 u_1, \mu_n v_n \rangle + \langle \lambda_2 u_2, \mu_1 v_1 \rangle + \cdots + \langle \lambda_m u_m, \mu_n v_n \rangle =$$
$$= \lambda_1 \overline{\mu_1} \langle u_1, v_1 \rangle + \cdots + \lambda_1 \overline{\mu_n} \langle u_1, v_n \rangle + \lambda_2 \overline{\mu_1} \langle u_2, v_1 \rangle + \cdots + \lambda_m \overline{\mu_n} \langle u_m, v_n \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_j} \langle u_i, v_j \rangle$$

□

По определение, за евклидово или унитарно пространство V, негови вектори $v_1, ..., v_n$ се наричат ортогонални ако $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$.

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство, произволни ненулеви ортогонални вектори са линейно независими.

Доказателство: Нека пространството да е V над поле $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$, $v_1, ..., v_n$ са произволните ненулеви ортогонални вектори и $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_n v_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V, \lambda_1, ..., \lambda_n \in F$. $\langle \overrightarrow{\mathcal{O}}_V, v_i \rangle = 0$ от вече доказано свойство и $\langle \overrightarrow{\mathcal{O}}_V, v_i \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + \cdots + \lambda_n v_n, v_i \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$ (понеже от дефиницията за ортогонални вектори $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j$). $\langle v_i, v_i \rangle = ||v_i||^2 > 0$, то $\lambda_i = 0$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$ и $v_1, ..., v_n$ са линейно независими. □

По определение, за евклидово или унитарно пространство V и за негов вектор v, дължина на v се нарича $||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}^{\geq 0} \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \langle v, \quad v \rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

По определение, за евклидово или унитарно пространство V, негови вектори $v_1, ..., v_n$ се наричат ортонормирани, ако са ортогонални и $||v_i|| = 1, \ \forall i \in \{1, ..., n\}$.

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство V над поле F, базисът му $e = (e_1, ..., e_n)$ е ортонормиран тогава и само тогава, когато $\langle ex, ey \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = x^t \overline{y}$ за произволни $ex, ey \in V$ с координати $x, y \in M_{n\times 1}(F)$.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Щом базиса е ортонормиран, то $\langle ex, ey \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} u_j e_j \right\rangle =$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_i} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$, където $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ за } 1 \le i \ne j \le n \\ 1 \text{ за } 1 \le i = j \le n \end{cases}$

($\Leftarrow$) От предположението, следва че

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0\cdot 0 + \cdots + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + \cdots + 0\cdot 0 \\ +0\cdot 1 + 0\cdot 0 + \cdots + 0\cdot 0 = 0 \end{matrix}$$

и $\langle ej, e_i \rangle = \overline{\langle ei, e_j \rangle} = \overline{0} = 0$. Следователно базисът е ортонормиран. □

Твърдим, че съществува алгоритъм (ортогонализация по метода Грам-Шмид), който при евклидово или унитарно пространство V над F, за линейно независими вектори $a_1, ..., a_n \in V$ построява ортогонални вектори $b_1, ..., b_n : l(a_1, ..., a_i) = l(b_1, ..., b_i) \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$. Също $b_m = a_m \quad \forall a_m$ ортогонален.

Доказателство: Ще го докажем с индукция по i.

База: $n = 1$ Избираме $b_1 = a_1$.

Индукционна стъпка: Нека $a_1, ..., a_i \in V$ да са линейно независими. То тогава $a_1, ..., a_{n-1}$ също са линейно независими и по Индукционно предположение съществуват ненулеви $b_1, ..., b_{i-1} \in V$: $l(a_1, ..., a_{i-1}) = l(b_1, ..., b_{i-1})$. Търсим $b_i = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} b_j$, където b_i е ортогонален на $b_1, ..., b_{i-1}$. Тогава трябва да е изпълнено $0 = \langle b_i, b_j \rangle = \langle a_i, b_j \rangle + \langle \lambda_{i,j} b_j, b_j \rangle = \langle a_i, b_j \rangle + \lambda_{i,j} \langle b_j, b_j \rangle \quad \forall j \in \{1, ..., i-1\}$. Допускаме, че $b_j \ne \overrightarrow{\mathcal{O}}$ и избираме $\lambda_{i,j} = -\frac{\langle a_i, b_j \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle}$ (скаларните квадрати са неотрицателни) и $b_1, ..., b_i$ са ортогонални.

Ако допуснем, че $b_j = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, то $a_i = \sum_{j=1}^{i-1} (-\lambda_{i,j}) b_j \in l(b_1, ..., b_{i-1}) = l(a_1, ..., a_{i-1})$, противоречи на линейната независимост на $a_1, ..., a_i$.

Проверяваме, че $l(a_1, .., a_i) = l(b_1, ..., b_i)$: $l(a_1, ..., a_i) = l(a_1, ..., a_{i-1}) + l(a_i) = l(b_1, ..., b_{i-1}) + l(a_i) = l(b_1, ..., b_{i-1}, a_i)$. Забелязваме, че $b_i \in l(b_1, .., b_{i-1}, a_1)$ и $a_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} b_j \in l(b_1, .., b_i)$. Ако $a_1, .., a_i$ са ортогонални, то и $a_1, ..., a_{i-1}$ също са ортогонални и от Индукционно предположение $b_m = a_m \quad \forall m \in \{1, ..., i-1\}$. Тогава за търсеното b_i получаваме $\lambda_{i,j} = -\frac{\langle a_i, b_j \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle} = -\frac{\langle a_i, a_j \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle} = 0$, от където $b_i = a_i$. □

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство V над поле F, с линейно независими вектори $a_1, ..., a_n$ и вектор $a_{n+1} \in l(a_1, ..., a_n)$, прилагането на ортогонализация по метода на Грам-Шмид върху $a_1, ..., a_{n+1}$ връща $b_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$.

Доказателство: От ортогонализация по метода на Грам-Шмид върху $a_1, ..., a_n$ получаваме ненулеви ортогонални вектори $b_1, ..., b_n$, за които $l(a_1, ..., a_n) = l(b_1, ..., b_n)$. Търсим $b_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1,j} b_j$. Понеже $a_{n+1} \in l(a_1, ..., a_n) = l(b_1, ..., b_n)$, то съществуват $\mu_j \in F$, такива че $a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j$. Тоест

$b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1,j} b_j = \sum_{j=1}^{n} (\mu_j + \lambda_{n+1,j}) b_j$. От ортогоналността на $b_{n+1} \implies 0 = \langle b_{n+1}, b_j \rangle = (\mu_j + \lambda_{n+1,j}) \langle b_j, b_j \rangle$. Следователно $\mu_j + \lambda_{n+1} = 0 \quad \forall j \in \{1, ..., n\}$ и $b_{n+1} = \vec{\mathcal{O}}$. □

Твърдим, че за n-мерно евклидово или унитарно пространство V с ортонормирана система вектри $e_1, ..., e_k$, ако $k \leq n$, то $e_1, ..., e_k$ може да се допълни до ортонормиран базис $e_1, ..., e_k, ..., e_n$.

Доказателство: $e_1, ..., e_k$ са линейно независими (лема) и можем да ги допълним до базис $e_1, ..., a_{k+1}, ..., a_k$ (твърдение). От ортогонализация по метода на Грам-Шмид върху този базис получаваме ортогонални вектори $b_1, ..., b_n$, за които $b_j = e_j \quad \forall j \in \{1, ..., k\}$, които също са базис (теорема). Полагаме $||b_i|| := \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle}^{\geq 0}$, $e_i := \frac{b_i}{||b_i||} \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$ и получената система вектори $e_1, ..., e_n$ е линейно независима (лема) и ортонормиран базис (теорема). □